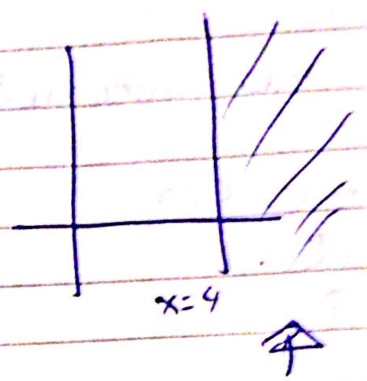
17.05.16

$(x_n)_n$ βασική ακ.

$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

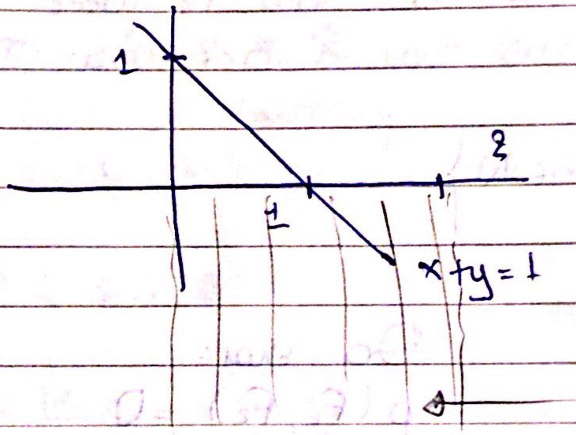
$\delta(A) = r < \infty$

$A \subseteq B_{\kappa\lambda}(x_n, r)$



είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο

$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y<1 \ , \ 0 \leq x < 2\}$



δεν είναι φραγμένο
δεν είναι κλειστό
(θα ήταν κλειστό αν ≤ 1)

(βλέπε βιβλίο για τέτοια παραδείγματα)

$(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα (δ.χ.)

1) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall x \in E$, $x \in \mathbb{R}$
3) $\|x\| \geq 0$ $\forall x \in E$
$\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$ ανν $x = 0_E$

Ορίζουμε τώρα $\rho(x,y) = \|x-y\|$

1) $\Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

H/W: Νδο. (E,ρ) όντως μ.χ.

Άσκηση 1:

$$\left.\begin{array}{l} (K \subseteq (E, \|\cdot\|)) \\ S \subseteq (E, \|\cdot\|) \\ K \text{ κλειστό}, S \text{ συμπαγές} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Νδο } K+S \text{ κλειστό}$$

Λύση

$K+S = \{x+y : x \in K, y \in S\}$

Έστω $(z_n)_n \subseteq K+S$

$z_n \xrightarrow{\rho} z$

Θ.δ.ο. $z \in K+S$

$\forall n \, \exists x_n \in K, \exists y_n \in S : z_n = x_n + y_n$

$(y_n)_n \subseteq S$, S συμπαγές $\Rightarrow \exists y_{k_n} \xrightarrow[\|\cdot\|]{\rho} y \in S$

και $z_n = x_n + y_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{\rho} z$

$$\left.\begin{array}{l} z_{k_n} = x_{k_n} + y_{k_n} \to z \\ y_{k_n} \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} z_{k_n} & - & y_{k_n} & = & x_{k_n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ z & & y & & x \end{array}$$

δηλ. βγάλινε σ' έναν x που το ορίζουμε ως z-y.

άρα $z - y =: x$

$\Rightarrow z = x + y$, $x \in K$, $y \in S$

$\Rightarrow z \in K+S$

Άσκηση 2: $K, S \subseteq (E, \|\cdot\|)$ συμπαγή $\Rightarrow K+S$ συμπαγές

Λύση

Δε φαίνεται να μπορούμε να πετύχουμε κάτι με καλύμματα
(άλλοι τρόποι: • πλήρες + ολ. φραγ.
• ακολουθιακή συμπάγεια)

Θα τ' αποδείξουμε με ακολουθιακή συμπάγεια.

Θδο $K+S$ ακολουθιακά συμπαγές.
Έστω $(z_n)_n \subseteq K+S$

Θ.δ.ο. $\left.\begin{array}{l} \exists\, z_{k_n} \text{ υποκ.} \\ \exists\, z \in K+S \end{array}\right\} \Rightarrow z_{k_n} \to z$

$(\forall n)\ \exists\, x_n \in K,\ \exists\, y_n \in S : z_n = x_n + y_n$

$(x_n)_n \subseteq K$ συμπαγές $\Rightarrow \exists\, x_{k_n} \to x \in K$

$(y_{k_n})_n \subseteq S$ συμπαγές $\Rightarrow \exists\, y_{k_{l_n}} \to y \in S$

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} x_{k_n} \to x \Rightarrow x_{k_{l_n}} \to x \in K \\ y_{k_{l_n}} \to y \in S \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x_{k_{l_n}} + y_{k_{l_n}}}_{z_{k_{l_n}}} \to x+y \in K+S$

βρίσκουμε μια υπακολουθία που συγκλίνει εκεί

Όπως ξέρουμε:
$x_n \to x$
$y_n \to y$
τότε
$x_n + y_n \to x+y$
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΤΟ ΑΠΟΔΕΙΞΩ

$0 \le \rho(x_n+y_n, x+y) \to 0$
$= \|(x_n+y_n)-(x+y)\|$
$= \|(x_n-x)+(y_n-y)\|$
$\le \|x_n-x\| + \|y_n-y\|$
$= \rho(x_n,x) \to 0$, $\rho(y_n,y) \to 0$

άρα $(x_n,y_n) \to (x,y)$

Άσκηση 3: $(\mathbb{R}, |\,|)$ πλήρης μχ.

$\delta(\mathbb{R}) = +\infty$

$(\mathbb{R}, |\,|)$ όχι φραγμένο $\Rightarrow$ όχι συμπαγή $\Rightarrow$ δηλ. $\exists$ ανοιχτό κάλυμμα χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα

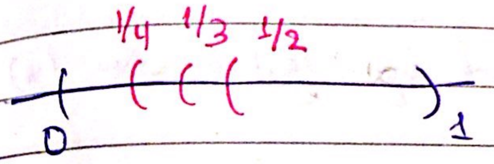
$\bigcup\{(-n,n), n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{R}$

$\downarrow$

κάλυμμα χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα

π.χ. ένα τέτοιο είναι $\{(-n,n), n\in\mathbb{N}\}$ το οποίο μεγαλώνει συνέχεια $\bigcup\{(-n,n), n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{R}$

Βρείτε στο $(0,1)$ όχι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα



ανοιχτό κάλυμμα του $(0,1)$: $\left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) : n\in\mathbb{N}\right\}$

Άσκηση 4: $\left.\begin{array}{l} A, B \subseteq (E,\rho) \\ A, B \text{ συμπαγή} \end{array}\right\} \Rightarrow A\cup B$ συμπαγές

Λύση

Έστω $\{G_i : i\in I\}$ ανοιχτό κάλυμμα στο E του $A\cup B$

$\left.\begin{array}{l} A\cup B \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \\ G_i \subseteq E \text{ ανοιχτά} \end{array}\right\} \overset{A \text{ συμπ.}}{\Rightarrow} \exists n\in\mathbb{N} : i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ $\boxed{A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k}}$

$\left.\begin{array}{l} B \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i \\ B \text{ συμπαγές} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists m\in\mathbb{N}, j_1, \dots, j_m \in I :$ $\boxed{B \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} G_{j_k}}$

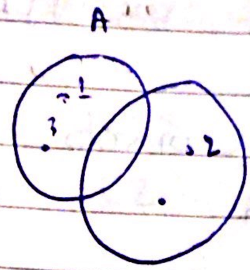
Άρα,

$$A\cup B \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_{ik}\right)\cup\left(\bigcup_{\ell=1}^{m} G_{j\ell}\right)$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: $A\cup B$ ακολ. συμ.

Έστω $(x_n)_n \subseteq A\cup B$. Θ.δ.ο. $\exists\, x_{k_n}\to x$

$\exists\, x\in A\cup B$



Αν η ακολουθία ζούσε όλη μέσα στο A (κ.ο.κ.) θα υπήρχε μια υπακολουθία που θα συνέκλινε στο A (ή στο B) άρα στην ένωση

$x_n : n\in\mathbb{N}$
$\in A\cup B$

δηλ. $\exists$ μια υπακολουθία που ζει είτε στο A είτε στο B

π.χ.

n∈περ. n∈περ. ~> άλλοι περιττ.

$\Rightarrow\ \exists\, x_{k_n}\subseteq A$ ή $\exists\, x_{\ell_n}\subseteq B$

Άσκηση 5: $A\subseteq (E,\rho)$ ώστε $\forall\,(x_n)_n\subseteq A$
$\exists\, x_{k_n}\to x$ (δεν μου λέει αν $x\in A$)
$\Rightarrow\ \bar{A}$ συμπαγές

$\left.\begin{array}{l} x_n\to x \\ ή \\ \supset \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\bar{A}$

Λύση

Θδο $\bar{A}$ ακολουθιακά συμπαγές.

Έστω $(y_n)_n\subseteq\bar{A}$

Θ.δ.ο. $\underbrace{\exists\, y_{k_n}\to y}_{(1)}\overbrace{\in\bar{A}}^{(2)\ ✓}$ αφού $\bar{\bar{A}}=\bar{A}\Rightarrow\bar{A}$ κλειστό

$(y_n)_n \subseteq \bar{A}$

$y_n \in \bar{A} \Rightarrow B\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x_n \in B\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \cap A$

$\Rightarrow x_n \in A$ και $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, $(*)$

δηλ. η μια πλησιάζει την άλλη

$\Rightarrow \exists x \in E : \exists x_{k_n} \to x$, $(**)$

(B) Τότε $y_{k_n} \to ?$

$(*) \Rightarrow \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) < \frac{1}{k_n} \to 0$ για $n \to \infty$

$(**) \Rightarrow \rho(x_{k_n}, x) \to 0$

$\Rightarrow$ Α: $\rho(y_{k_n}, y) \leq \underset{\downarrow\, 0}{\rho(y_{k_n}, x_{k_n})} + \underset{\downarrow\, 0}{\rho(x_{k_n}, y)}$

Άρα: $\rho(y_{k_n}, y) \to 0$

Άσκηση 6: $A \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) A φραγμένο

ii) $\bar{A}$ συμπαγές

Λύση

$\bar{A}$ συμπαγές $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \bar{A} \text{ φραγμένο} \\ A \subseteq \bar{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ φραγμένο

Αντίστροφα,
Α.ν.δ.ο. $\bar{A}$ κλειστό και φραγμένο (αφού είμαστε στο $\mathbb{R}$)

$\bar{A}$ κλειστό ως κλειστότητα συνόλου

Ισχύει: $\delta(\bar{A}) = \delta(A) < \infty \Rightarrow \delta(\bar{A}) < \infty$
άρα $\bar{A}$ φραγμένο

Άρα, $\bar{A}$ κλειστό, φραγμένο $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \bar{A}$ συμπαγές.

Άσκηση 7: $A = \overbrace{[\sqrt{2}, \sqrt{3}]}^{\subseteq \mathbb{R}} \cap \mathbb{Q} \subseteq \overset{(E,\rho)}{(\mathbb{Q}, |\cdot|)}$

$\sqrt{2}, q_1, q_2 \cdots \sqrt{3}$

Είναι το A κλειστό στο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$;

Λύση
$(x_n) \subseteq A$
$x_n \xrightarrow{\rho} x \in \mathbb{Q}$

Για νδο $A \subseteq E$ κλειστό, πρέπει νδο: $\left.\begin{array}{l}\forall x_n \to x \\ (x_n) \subseteq A\end{array}\right\} \Rightarrow x \in A$
(όμως πρέπει και $x \in E$)

Αλλιώς, παίρνουμε $(x_n)_n \subseteq A : x_n \to x \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow \sqrt{2} < x_n < \sqrt{3} \Rightarrow x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ $\Bigg| \Rightarrow$

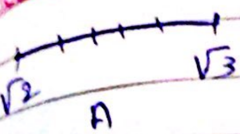
$\Rightarrow x \in \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}] = A$ (η τομή κλειστού στον υπόχωρο, είναι κλειστό στον υπόχωρο)
$\Rightarrow x \in A$
$(\Rightarrow A$ κλειστό$)$

Έχουμε: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

(E,ρ) μ.χ. $= (\mathbb{Q}, |\cdot|) \supseteq \underset{(E,\rho)}{A} = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Είναι το A συμπαγές;

Λύση



→ τον μικρότερο των ρητών στον πραγματικό

Επιλέξαμε μια $(q_n) \subseteq A : q_n \to \sqrt{2}$

τότε $q_n \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{2} < q_n < \sqrt{3}$

και κάθε υπακολουθία $q_{k_n} \to \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \notin A$ (δηλ. $\nexists$ q_{k_n} που το όριο να είναι μέσα στο A)

Είναι; (παρατήρηση)
$\bar{A}^{\mathbb{Q}} = A \subseteq \mathbb{Q}$
$\bar{A}^{\mathbb{R}} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subseteq \mathbb{R}$ (αφού κάθε πραγματικός στο A πλησιάζεται από ρητούς)

Σχόλια:
$$\underset{\mathbb{Q}}{\overset{\cap}{q_n}} \to \sqrt{2}$$

q_n συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$ ✓
στο $\mathbb{Q}$; <u>ΟΧΙ</u> είναι όμως βασική στο $\mathbb{Q}$

αφού $|q_n - q_m| \le |q_n - \sqrt{2}| + |q_m - \sqrt{2}|$
$$\downarrow \qquad \Leftarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$0 \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0$$

αλλά όχι συγκλίνουσα στο $\mathbb{Q}$ γιατί συγκλίνει στο $\sqrt{2}$ που είναι άρρητος.
Αυτό συμβαίνει γιατί ο $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρης.
$\bar{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ (δηλ. κάθε ρητός πλησιάζεται από πραγματικό)

Άσκηση 8: (E,ρ) συμπαγής, $f:(E,\rho)\to(E,\rho)$ συνεχής, $f(x)\neq x \ \forall x\in E$ $\Rightarrow \exists \varepsilon>0 : \rho(f(x),x)\geq \varepsilon \ \forall x\in E$

Λύση

$f(x)\neq x$, $\forall x\in E$ άρα $\rho(f(x),x)>0$

$g:(E,\rho)\to\mathbb{R}^+$ συνεχής

$g(x)=\rho(f(x),x)$

η g πιάνει και το min και το max
$\Rightarrow$ μου ενδιαφέρει το min

Η g είναι συνεχής, διότι:

$x_n \xrightarrow{\rho} x$

Θ.δ.ο. $g(x_n)\to g(x) \Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{\rho} f(x)$

$\rho(f(x_n),x_n)\to\rho(f(x),x)$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$g(x_n) \longrightarrow g(x)$ άρα είμαστε ΟΚ.

$\Rightarrow \exists x_0\in E : g(x_0)\leq g(x) \ \forall x\in E$

$\qquad \| \qquad\qquad \|$

$0<\rho(f(x_0),x_0) \qquad \rho(x,f(x))$

Άρα: $\rho(x,f(x))\geq g(x_0)>0$

Επιλέγουμε $\boxed{\varepsilon=g(x_0)}$

Β' ΤΡΟΠΟΣ: Με άτοπο.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_\varepsilon\in E : 0\leq\rho(f(x_\varepsilon),x_\varepsilon)<\varepsilon$

Για $\underbrace{\varepsilon = \frac{1}{n}}_{\text{τη πλησιάζουμε όσο μπορούμε}}$: $\exists (x_n)_n \subseteq E$ έτσι ώστε $0 \leq \rho(f(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \subseteq E \\ (E,\rho) \text{ συμπαγής}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_{k_n} \to x \in E$

και $f(x_{k_n}) \to f(x)$ $\Rightarrow$

$\rho : E \times E \to \mathbb{R}$ συνεχής

$$\Rightarrow \rho(f(x_{k_n}), x_{k_n}) \to \rho(f(x), x)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \| \\ 0 & \Longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\lightning$ αφού $\rho(f(x), x) > 0$